



TITLE:

Matrix Argumentsの分布 (統計的多変量解析の研究報告集)

AUTHOR(S):

麻生, 泰弘

CITATION:

麻生, 泰弘. Matrix Argumentsの分布 (統計的多変量解析の研究報告集).
数理解析研究所講究録 1968, 44: 9-18

ISSUE DATE:

1968-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107683>

RIGHT:

Matrix Arguments の分布

阪大 基礎工 麻生泰弘

§0. 序

多変量正規分布に基づく多変量解析では, Wishart 分布が基本的な役割を果たしている。A. T. James は, 直交群上の不変測度と直交群の coset space とを導く多様体とをうまく用いて, Wishart 分布と種々の central 分布を導き, 更に群上の平均を用いて noncentral Wishart 分布を導いた。その後, 彼は, この noncentral Wishart 分布に対し, 正値実対称行列の zonal polynomial による表現を与えた。A. G. Constantine はこの zonal polynomial を用いて種々の noncentral 分布を与えた。多変量解析では, 行列の固有根と固有ベクトルとの分布が重要であるが, 此等の分布は, 行列の分布よりある程度導ける。ここでは, (noncentral) Wishart 分布の一般化として行列要素の (noncentral) Γ 分布を導入し, これと関連した実対称行列の空間での分布を, 出来るだけ系統的に導くことを

試せる。詳しくは, Ann. Inst. Stat. Math. に寄稿した小生の
の論文を参照されたい。

§1. Central 分布

S_p を (p, p) 実対称行列の空間とし, S_p^+ を (p, p) 正値実
対称行列の作る convex cone とする。いま, $L \in GL(p; R)$ に
対し, 空間 S_p 上の変換 $a(L)$ を

$$(1) \quad a(L) : S \rightarrow LSL', \quad S \in S_p$$

で定義すると, $a(L_1 L_2) = a(L_1) a(L_2)$, $L_1, L_2 \in GL(p; R)$ が
成り立ち, 対応

$$(2) \quad a : L \rightarrow a(L), \quad L \in GL(p; R)$$

は群 $GL(p; R)$ の空間 S_p に対する表現 (S_p, a) を与え,
空間 S_p^+ は空間 S_p の a -不変部分空間である。更に, 群
 $\mathcal{A}(GL(p; R)) = \{a(L), L \in GL(p; R)\}$ は, S_p^+ の上は transitive に
作用し, 即ち cone S_p^+ は, homogeneous convex cone である。ま
た直交群 $O(p; R)$ は, 単位行列 E_p に対する isotropy subgroup
 $\mathcal{A}(O(p; R)) = \{a(H), H \in O(p; R)\}$ を与える。いま群 $\mathcal{A}(GL(p; R))$
の部分群 $\mathcal{A}(O(p; R))$ による left-coset $\{a(LH); H \in O(p; R)\}$
をとると, $a(LH)E_p = a(L)E_p$ より, これは $S = LL' \in S_p^+$
と対応し, この対応は 1-1 である。この意味で,

$$(3) \quad S_p^+ = \mathcal{A}(GL(p; R)) / \mathcal{A}(O(p; R)),$$

となる。

次に、この空間 S_p^+ に於ける点 S を通り、点 E_p を中心とする sphere を集合 $\{a(H_1 L H_2) E_p; L \in GL(p; R), L L' = S, H_1, H_2 \in O(p; R)\}$ で定義しよう。これは集合 $\{H S H'; S \in S_p^+, H \in O(p; R)\}$ と同値である。この場合、行列 $S, T \in S_p^+$ の間に、 $T = cS$, $c > 0$ なる関係があれば、 $H T H' = c(H S H')$ となり、特に scalar matrix $c E_p$, $c > 0$ を通る sphere は $c E_p$ である。

S_p^+ 上の函数 $f(S)$ が symmetric fn. であるとは、任意の $H \in O(p; R)$ に対し

$$f[a(H)S] = f(S)$$

が成立するとき、即ち点 $S \in S_p^+$ を通り、点 E_p を原点とする sphere の上は constant-valued な函数をいう。

- 函数 $f(S)$, $S \in S_p^+$ が $\mathcal{A}(GL(p; R))$ -不変な函数ならば、symmetric function である。
- Symmetric function $f(S)$, $S \in S_p^+$ は、行列 S の固有根のみに depend する。
- この意味で、実対称行列の zonal polynomial は symmetric function (polynomial) である。

Proposition 1.

空間 S_p^+ 上の分布 $dF(S) = f(S) dS$ について、 $f(S)$

が symmetric function のとき, n のとき n の対行列 S の固有根と固有ベクトルとは独立に分布し, 後者の分布は直交群 $O(p; R)$ の上の一様分布である。この様な分布を symmetric な分布 と言う。

Definition 1. Γ 分布 $\Gamma_p(s; C, A)$

$$(4) dH(s) = \begin{cases} \frac{1}{\det(C)^p \Gamma_p(s)} \exp\{-C^{-1}(s-A)\} \det(s-A)^{s-\frac{p+1}{2}} ds, \\ C \in S_p^+, s > \frac{p-1}{2}, s-A \text{ pos. def.}, \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

$$\therefore \Gamma_p(s) = \int_{S_p^+} \exp(-s) \det(s)^{s-\frac{p+1}{2}} ds = \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{p-i+1}{2}\right)$$

$\Gamma_p(s; E_p, 0) = \Gamma_p(s)$ をこの分布の標準形と言う。分布

分布 $\Gamma_p(s; C, A)$ の特性函数は

$$(5) \varphi(H) = \exp(\operatorname{tr}(H)A) \det(E_p - \operatorname{tr}(H)C)^{-s}, \quad \lambda = \sqrt{-1}$$

$$(H) = (e_{ij} \theta_{ij}), \quad \theta_{ij} = \theta_{ji}; \quad e_{ij} = 1 (i=j), \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (i \neq j)$$

と表わされる。このことから, この分布は

$$\Gamma_p(s; C, A) + \Gamma_p(s; C, B) = \Gamma_p(s; C, A+B),$$

$$\Gamma_p(s_1; C, A) + \Gamma_p(s_2; C, A) = \Gamma_p(s_1+s_2; C, A)$$

と再生性をもつが, $s > \frac{p-1}{2}$ の故に, 無限分解可能ではない。また, 分布 $\Gamma_p(s)$ は symmetric な分布である。

Definition 2. Dirichlet 分布 $D_p(s_1, \dots, s_k, s_{k+1})$

$$s_1, s_2, \dots, s_p \in S_p \text{ に対して}$$

$$(6) \quad dF(S_1, S_2, \dots, S_R) = \begin{cases} \frac{1}{B_p(S_1, \dots, S_R, S_{R+1})} \prod_{i=1}^R \det(S_i)^{S_i - \frac{p+1}{2}} \cdot \det(\bar{E}_p - S_1 - S_2 - \dots - S_R)^{S_{R+1} - \frac{p+1}{2}} dS_1 \dots dS_R, \\ S_1, \dots, S_{R+1} > \frac{p-1}{2}, S_1, \dots, S_R \in S_p^+, \\ \bar{E}_p - S_1 - S_2 - \dots - S_R \text{ pos. def.} \\ 0, \text{ その他} \end{cases}$$

∴

$$B_p(S_1, \dots, S_{R+1}) = \int \left[\prod_{i=1}^R \det(S_i)^{S_i - \frac{p+1}{2}} \right] \det(\bar{E}_p - S_1 - \dots - S_R)^{S_{R+1} - \frac{p+1}{2}} dS_1 \dots dS_R = T_p(S_1 + \dots + S_{R+1}) / (T_p(S_1) \dots T_p(S_{R+1})).$$

特に $R=1$ のときを, B -分布 $Be_p(S_1, S_2)$.

Definition 3.

F -分布 $F_p(\alpha, \beta)$

$$(7) \quad dF(S) = \begin{cases} \frac{1}{B_p(\alpha, \beta)} \frac{\det(S)^{\alpha - \frac{p+1}{2}}}{\det(\bar{E}_p + S)^{\alpha + \beta}} dS, S \in S_p^+, \alpha, \beta > \frac{p-1}{2} \\ 0, \text{ その他} \end{cases}$$

• 分布 $Be_p(S_1, S_2)$ 及び $F_p(\alpha, \beta)$ は symmetric distribution である。

さて, 行列 S_1 及び S_2 の分布を, それぞれ独立に分布 $T_p(S_1; C)$ 及び $T_p(S_2; C)$ に従うものとするとき, 行列

$$(8) \quad S = T' S_1 T, \quad TT' = S_2^{-1}$$

の分布を考えよう。

実数 R の上の分布に就いては

∴ F 分布 $F(S_1, S_2)$ をする。我々の場合,

1) $T' = T$ とすると, 行列 S の分布は

$$dF(S) = \frac{1}{B_p(s_1, s_2)} \det(S)^{s_1 - \frac{p+1}{2}} \cdot \frac{1}{\det(C)^{s_1+s_2} \Gamma_p(s_1, s_2)}.$$

(9)

$$\cdot \int_{S_2 \in S_p^+} \exp[-\frac{1}{2} \tilde{T}^{-1} \tilde{C}^{-1} \tilde{T} (E_p + S)] \det(S_2)^{s_1+s_2 - \frac{p+1}{2}} dS_2 \cdot dS$$

をえらぶ。特に行列 C が scalar matrix の場合には
行列 S の分布は $F_p(s_1, s_2)$ となる。

2) $C = PP'$ とし, $S_1 = P'T_1P$, $S_2 = P'T_2P$, $T = \frac{1}{P}T_2^{\frac{1}{2}}$,
但し $T_2^{\frac{1}{2}} = (T_2^{\frac{1}{2}})'$, とすると, 行列 S は

$$S = T_2^{\frac{1}{2}} T_1 T_2 \text{ となり, 行列 } S \text{ の分布は } F_p(s_1, s_2).$$

3) T が positive diagonal elements ε, τ , lower
triangular matrix の場合は, 行列 S の分布は

$$(10) \quad dF(S) = \frac{1}{B_p(s_1, s_2)} \det(S)^{s_1 - \frac{p+1}{2}} \det(E_p + S)^{-(s_1+s_2) + \frac{p+1}{2}} \\ \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^p \det((E_p + S)_{[i]})} dS,$$

$$\text{但し, } (E_p + S)_{[i]} = (S_{\nu\mu} + \delta_{\nu\mu}); \nu, \mu = p-i+1, \dots, p$$

をえらぶ。

4) T が positive diagonal elements ε, τ , upper
triangular matrix の場合は, 行列 S の分布は

$$(11) \quad dF(S) = \frac{1}{B_p(s_1, s_2)} \det(S)^{s_1 - \frac{p+1}{2}} \det(E_p + S)^{-(s_1+s_2) + \frac{p+1}{2}} \\ \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^p \det((E_p + S)^{[i]})} dS,$$

但し $(E_p + S)^{[\cdot]} = (S_{\nu\mu} + S_{\nu\mu})$; $\nu, \mu = 1, \dots, p$
 である。なお、行列 S の固有根は、分布 $F_p(s_1, s_2)$ の
 端点と同一。3) 及び 4) は Olkin-Rubin の結果である。

§ 2. Noncentral 分布

Definition 1. 非心 P -分布 $\Gamma_p(s; C, \Omega)$

$$(1) dF(s) = \begin{cases} \frac{\det(-C^{-1}S) \det(S)^{s - \frac{p+1}{2}}}{\Gamma_p(s) \det(C)^s} \det(-C^{-1}\Omega) \cdot F_1(s; C^{-1}SC^{-1}\Omega) dS, \\ s > \frac{p-1}{2}, S, C \in S_p^+, \Omega \in S_p \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

行列 C が単位行列の端点、即ち $C = E_p$ のとき $\Gamma_p(s; E_p, \Omega)$ の分布
 の標準形: $\Gamma_p(s; E_p, \Omega) = \Gamma_p(s; \Omega)$.

分布 $\Gamma_p(s; C, \Omega)$ の特性函数は、

$$(2) \varphi(H) = \det[-[E_p - [E_p - i(H)C]^{-1}]C^{-1}\Omega] \det(E_p - i(H)C)^{-s}.$$

Definition 2. 非心 B -分布 $Be_p(s_1, s_2; \Omega)$

$$(3) dF(S) = \begin{cases} \frac{\det(S)^{s_1 - \frac{p+1}{2}} \det(E_p - S)^{s_2 - \frac{p+1}{2}}}{B_p(s_1, s_2)} \det(-\Omega) \cdot F_1(s_1 + s_2; S; \Omega) dS \\ , s_1, s_2 > \frac{p-1}{2}, E_p - S \text{ pos. def.} \\ , S \in S_p^+ \\ 0, \text{その他} \end{cases}$$

Definition 3. 非心 F -分布 $F_p(s_1, s_2; \Omega)$

$$A) \quad d\bar{H}(S) = \begin{cases} \frac{\det(S)^{\delta_1 - \frac{p+1}{2}} \det(\bar{E}_p + S)^{-\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}}{B_p(\delta_1, \delta_2)} \operatorname{etr}(-\Omega) \cdot \bar{F}_1(\delta_1 + \delta_2; \delta_1; \\ (\bar{E}_p + \bar{S})^{-1} \Omega) dS, \\ \delta_1, \delta_2 > \frac{p-1}{2}, S \in S_p^+, \Omega \in S_p \\ 0, \quad \text{その他} \end{cases}$$

なお, ${}_0F_1, {}_1F_1$ は matrix arguments の hypergeometric function の series に属する函数で, symmetric function である。
 • 当然のことながら, 上の三つの分布は空間 S_p^+ での symmetric distribution である。しかしながら, これ等の分布の固有根は, 次の symmetrization により計算出来る。即ち

$$\hat{d}\bar{H}(S) = \int d\bar{H}(H'SH) dV(H), \quad dV(H) \text{ は } O(p; R) \text{ の } \\ \text{上の正規化された } O(p; R) \text{ 不変測度, により計算出来る。例えば,} \\ \text{分布 } P_p(\delta; \bar{E}_p, \Omega) \text{ に対し,} \\ \hat{d}\bar{H}(S) = \frac{\operatorname{etr}(-S) \det(S)^{\delta - \frac{p+1}{2}}}{P_p(\delta)} \operatorname{etr}(-\Omega) \cdot {}_0F_1(\delta; S, \Omega) dS, \\ S \in S_p^+,$$

すなわち,

$${}_0F_1(\delta; S, \Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(k)} \frac{1}{k!(S)_{(k)}} \frac{C_{(k)}(S) C_{(k)}(\Omega)}{C_{(k)}(\bar{E}_p)}, \\ C_{(k)}(\cdot) \text{ は partition } (k) \text{ に属する zonal polynomial.}$$

すなわち, いま行列 S_1 と S_2 とは, 互に互に独立に分布 $P_p(\delta_1; C, \Omega), P_p(\delta_2; C, 0)$ に従うものとする。このとき,

行列

$$(5) \quad S = T^{-1} S_1 (\bar{T})', \quad S_1 + S_2 = T T'$$

の分布を考えよう。実数 R 上の分布の場合、これは非心 B -

分布 $Be(S_1, S_2; \bar{C}^{-1}\Omega)$ となるが、我々の場合、

(1) $T = T'$ の場合は、

$$dH(S) = \frac{\det(S)^{S_1 - \frac{p+1}{2}} \det(\bar{E}_p - S)^{S_2 - \frac{p+1}{2}}}{B_p(S_1, S_2)} e^{\text{tr}(-\bar{C}^{-1}\Omega)}$$

$$\cdot \frac{1}{B_p(S_1 + S_2) \det(C)^{S_1 + S_2}} \cdot$$

$$\cdot \int_{T \in S_p^+} e^{\text{tr}(-\bar{C}^{-1}T)} \det(T)^{S_1 + S_2 - \frac{p+1}{2}} {}_0F_1(S_1; \bar{C}^{-1}\Omega \bar{C}^{-1/2} S V^{1/2}) dT \cdot dS$$

$$T \in S_p^+, (V^{1/2})' = V^{1/2}$$

となり、特に行列 C 及び Ω が scalar matrix ならば、この行

列 S の分布は分布 $Be_p(S_1, S_2; C^{-1}\Omega)$ となる。

(2) T が positive diagonal elements をもった lower triangular matrix の場合、

$$dH(S) = \frac{1}{B_p(S_1, S_2)} \det(S)^{S_1 - \frac{p+1}{2}} \det(\bar{E}_p - S)^{S_2 - \frac{p+1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \int [e^{\text{tr}(-T'T)} \det(T'T)^{S_1 + S_2} {}_0F_1(S_1; S T' \bar{C}^{-1} \Omega T) 2^{\frac{p}{2}} \prod_{i=1}^p t_i^{-\frac{1}{2}} T \cdot dT] \cdot dS,$$

特に、行列 $C^{-1}\Omega = \begin{bmatrix} a^2 & & \\ & 0 & 0 \\ & 0 & \ddots & 0 \end{bmatrix}$ のときは、分布 $Be_p(S_1, S_2; C^{-1}\Omega)$ 。

参考文献:

A. T. James, "Zonal Polynomials of the Real Positive Definite Symmetric Matrices," *Ann. Math.* 74 (1961), pp. 455-464

A. T. James, "Group Methods in Normal Multivariate Distribution Theory," (Princeton Ph. D Thesis), (1952)

A. G. Constantine, "Some Non-Central Distribution Problems in Multivariate Analysis," *Ann. Math. Stat.* 34 (1963), pp. 1270-1285

Y. H. Asoh, "On the P -distribution of matrix argument and related distribution," (submitted to *Ann. Inst. Stat. Math.*)